Estatística II

Licenciatura em Gestão do Desporto

2.º Ano/2.º Semestre

2024/2025

Aulas Teórico-Práticas N.º 7 e 8 (Semana 4)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 1 a 3)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 4 a 7)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 7 a 9)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 10 a 13)
• **Capítulo 1**: Revisões e Distribuições de Amostragem	• **Capítulo 2**: Estimação	• **Capítulo 3**: Testes de Hipóteses	• **Capítulo 4**: Modelo de Regressão Linear Múltipla

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

Método dos Momentos: Exercícios

(continuação)

1

Murteira et al (2015)
Capítulo 7

1. Seja uma população com função probabilidade

$$f(x \mid \theta) = \theta(1-\theta)^x \quad (x = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

onde $0 < \theta < 1$. Sabe-se que $E(X) = (1-\theta)/\theta$. Recolhida uma amostra casual de dimensão 1000 observou-se $\Sigma_{i=1}^{1000} x_i = 980$.

a) Obtenha uma estimativa para θ pelo método dos momentos.

b) Determine o estimador de máxima verosimilhança para θ.

c) Calcule, justificando, a estimativa da máxima verosimilhança para a média da população.

d) Reparametrize a distribuição em função de $\mu = E(X)$, e utilize a nova função probabilidade para estimar a média da população.

e) Mostre que $T = \Sigma_{i=1}^{1000} X_i$ é estatística suficiente para θ.

Exercício 1 a)

$f(x|\theta) = \theta(1-\theta)^x \quad (x = 0, 1, 2, 3, \dots)$ com $(0 < \theta < 1)$

$E(X) = \frac{1-\theta}{\theta} = \mu_1'$

Amostra casual: $(X_1, \dots, X_{1000}) \longrightarrow \sum_{i=1}^{1000} x_i = 980$

$\bar{x} = \frac{980}{1000} = 0.98$

a) $\theta = ?$

1.º momento ordinário da população: $\mu_1' = E(X) = \frac{1-\theta}{\theta}$

1.º momento ordinário da amostra: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$

<u>Método dos momentos:</u>

$$\mu_1' = \frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i}{1000} \Leftrightarrow \frac{1-\theta}{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i}{1000} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\theta} - 1 = \bar{X} \Leftrightarrow \frac{1}{\theta} = \bar{X} + 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{1}{\bar{X}+1}$$

Exercício 1 a)

Estimador: $\theta = \dfrac{1}{\overline{X}+1}$

Estimativa: $\tilde{\theta} = \dfrac{1}{\overline{x}+1} = \dfrac{1}{0.98+1} \simeq 0.5051$

Nota:

Momento ordinário de ordem k (ou momento de ordem k em relação à origem):

- $\mu'_k = E(X^k)$

- Momentos ordinários amostrais de ordem k:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

Murteira et al (2015)
Capítulo 7

3. Considere uma variável aleatória X cuja distribuição depende dos parâmetros α e θ, para a qual se tem $E(X)=\alpha\theta$ e $\mathrm{Var}(X)=\alpha\theta^2$. Sabendo que numa amostra casual de 320 observações se obteve $\Sigma_{i=1}^{320} x_i = 22.2$ e $\Sigma_{i=1}^{320} x_i^2 = 535.8$, apresente, justificando, uma estimativa para os parâmetros desconhecidos.

Exercício 3

V. A. com $F_X(x \mid \alpha, \theta)$

$E(X) = \alpha\theta \qquad Var(X) = \alpha\theta^2$

Amostra casual: $(X_1, \ldots, X_{320}) \to \sum_{i=1}^{320} x_i = 22.2$

$\sum_{i=1}^{320} x_i^2 = 535.8$

Vamos usar o método dos momentos. Não é possível usar o método da máxima verosimilhança porque não conhecemos a forma funcional de f(x|α, θ) e por isso não é possível obter L(α, θ).

Exercício 3

$$\mu_1' = E(X) = \alpha\theta$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \Leftrightarrow E(X^2) = Var(X) + E(X)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu_2' = Var(X) + E(X)^2$$

$$\begin{cases} \mu_1' = \dfrac{\sum_{i=1}^{320} x_i}{320} \\ \mu_2' = \dfrac{\sum_{i=1}^{320} x_i^2}{320} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\theta = \bar{x} \\ \alpha\theta^2 + (\alpha\theta)^2 = \sum_{i=1}^{320} x_i^2/320 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{\bar{x}}{\theta} \\ \dfrac{\bar{x}}{\theta}\theta^2 + \left(\dfrac{\bar{x}}{\theta}\right)^2\theta^2 = \sum_{i=1}^{320} x_i^2/320 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Exercício 3

$$(=) \left\{ \begin{array}{l} \overline{\qquad\qquad} \\ \bar{x}\theta + \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{320} x_i^2 / 320 \end{array} \right. (=)$$

$$(=) \left\{ \begin{array}{l} \overline{\qquad\qquad} \\ \bar{x}\theta = \sum_{i=1}^{320} x_i^2 / 320 - \bar{x}^2 \end{array} \right. (=) \left\{ \begin{array}{l} \overline{\qquad\qquad} \\ \theta = \dfrac{\sum_{i=1}^{320} x_i^2 / 320 - \bar{x}^2}{\bar{x}} \end{array} \right. (=)$$

$$(=) \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \dfrac{\bar{x}^2}{s^2} \\ \theta = \dfrac{s^2}{\bar{x}} \end{array} \right.$$

Exercício 3

Conclusão:

$$\tilde{\alpha} = \left(\frac{22.2}{320}\right)^2 \Big/ \left[\frac{535.8}{320} - \left(\frac{22.2}{320}\right)^2\right] = 0.00288$$

$$\tilde{\theta} = \left[\frac{535.8}{320} - \left(\frac{22.2}{320}\right)^2\right] \Big/ \left(\frac{22.2}{320}\right) = 24.06576$$

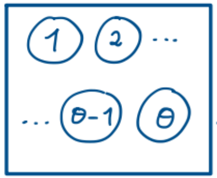
Murteira et al (2015)
Capítulo 7

4. Num saco existem θ bolas, numeradas de 1 a θ. Extraiu-se, ao acaso e com reposição, uma amostra de três bolas, tendo-se observado: 13, 5, 9.
   a) Calcule a estimativa do número de bolas existentes no saco, pelo método dos momentos.
   b) Obtenha a estimativa da máxima verosimilhança para θ.
   c) Com base nas estimativas obtidas nas alíneas anteriores o que pode dizer sobre os estimadores que as originaram.

Exercício 4 a)

θ bolas

Amostra casual: (X_1, X_2, X_3)



(Amostra com reposição) $\longrightarrow \begin{cases} x_1 = 13 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = 9 \end{cases}$

$$f_X(x|\theta) = \frac{1}{\theta} \quad (x = 1, 2, \cdots, \theta)$$

$X \sim U(1, \theta)$ Distribuição uniforme discreta

$$E(X) = \frac{\theta + 1}{2} = \mu_1'$$

a) $$\mu_1' = \frac{\sum_{i=1}^{3} X_i}{3} \Leftrightarrow \frac{\theta + 1}{2} = \bar{X} \Leftrightarrow \theta = \underbrace{2\bar{X} - 1}_{\text{Estimador}}$$

estimativa: $\tilde{\theta} = 2\bar{x} - 1 = 2\left(\frac{13+5+9}{3}\right) - 1 = 17$ bolas

Exercício 4 a)

Com a amostra observada o método dos momentos resulta numa estimativa admissível para θ uma vez que não se observou nenhuma bola com numero superior a 17. No entanto, não é garantido que isto se verifique em todas as amostras. Por exemplo:

$$(x_1, x_2, x_3) = (1,2,9) \Rightarrow \hat{\theta} = 2\,\frac{(1+2+9)}{3} - 1 = 7.$$

Com esta amostra o método dos momentos já não resultava numa estimativa admissível para θ uma vez que já se observou a bola nº 9, logo não podem existir apenas 7 bolas.

O método dos momentos é bom para estimar parâmetros referentes a momentos de variáveis aleatórias. Neste exercício, o parâmetro que estamos a estimar é o limite do suporte da variável aleatória (distribuição da população). A qualidade de um estimador não se deve avaliar olhando apenas para estimativas particulares (estejam estas muito próximas ou muito afastadas do verdadeiro valor do parâmetro). Interessa sim estudar o comportamento do estimador em sucessivas amostras, ou seja, estudar a sua distribuição por amostragem. Neste caso seria melhor usar outro estimador (o EMV).

Murteira et al (2015)
Capítulo 7

5. Considere uma amostra casual de dimensão n retirada de uma população com distribuição dada por:

$$f(x \mid \theta) = \frac{1}{2\theta}, \; (-\theta < x < \theta), \text{ para } \theta > 0.$$

Calcule um estimador para θ pelo método dos momentos.

Exercício 5

$(X_1, \ldots, X_n)$ amostra casual

$$f_X(x|\theta) = \frac{1}{2\theta} \quad (-\theta < x < \theta), \quad \theta > 0$$

Distribuição uniforme contínua

$$E(X) = \int_{-\theta}^{\theta} x \cdot f_X(x|\theta)\, dx =$$

$$= \int_{-\theta}^{\theta} x \cdot \frac{1}{2\theta}\, dx = \frac{1}{2\theta}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\theta}^{\theta} =$$

$$= \frac{1}{2\theta}\left(\frac{\theta^2}{2} - \left(\frac{(-\theta)^2}{2}\right)\right) = \frac{1}{2\theta}\left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^2}{2}\right) = 0$$

Como $E(X)$ não depende de θ vamos tentar o 2º momento:

Exercício 5

$$E(X^2) = \int_{-\theta}^{\theta} x^2 f_X(x|\theta)\,dx =$$

$$= \int_{-\theta}^{\theta} x^2 \cdot \frac{1}{2\theta}\,dx = \frac{1}{2\theta}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\theta}^{\theta} =$$

$$= \frac{1}{2\theta}\left(\frac{\theta^3}{3} - \left(\frac{(-\theta)^3}{3}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\theta}\left(\frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^3}{3}\right) = \frac{1}{\cancel{2}\theta}\left(\cancel{2}\,\frac{\theta^3}{3}\right) = \frac{\theta^2}{3}$$

Exercício 5

$$\underline{M.M}: \quad E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 / n \iff$$

$$\iff \frac{\theta^2}{3} = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 / n \iff$$

$$\iff \theta^2 = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \iff \theta = \pm\sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

$$\Rightarrow \tilde{\theta} = +\sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2} \quad (\text{porque } \theta > 0)$$

Exercício 5

<u>Nota</u>: Caso se reparasse que $X \sim U(-\theta, \theta)$, então:

$$E(X) = \frac{-\theta + \theta}{2} = 0$$

$$E(X^2) = Var(X) + \underbrace{E(X)}_{0}^{2} = \frac{(\theta - (-\theta))^2}{12} = \frac{(2\theta)^2}{12} = \frac{4\theta}{12} = \frac{\theta}{3}$$

Método da Máxima Verosimilhança

Estimadores

2

Métodos de Estimação

Até aqui falámos em estimadores e nas propriedades que devem possuir. Interessa ter procedimentos que construam estimadores com boas propriedades.

Vamos então falar dos principais métodos de estimação paramétrica.

Dos **métodos de estimação paramétrica** vamos referir:

o Método dos momentos e
o Método da Máxima verosimilhança

modulol_aula3_4_Estimação.pdf

Função de Verosimilhança

Seja X uma v.a. cuja distribuição depende de um parâmetro θ, desconhecido, e $(X_1, ..., X_n)$ uma amostra aleatória. Seja $(x_1, ..., x_n)$ a amostra observada.

Definição

Chama-se **verosimilhança da amostra** e representa-se por $\mathcal{L}(\theta | x_1, x_2, ..., x_n)$ a

$$f(x_1, ..., x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) \quad \text{caso contínuo}$$

$$P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i|\theta) \quad \text{caso discreto}$$

moduloI_aula3_4_Estimação.pdf

Método da Máxima Verosimilhança

O método da máxima verosimilhança, proposto por Fisher em 1922 e desenvolvido em 1925 consiste em escolher como estimativa de θ o valor que **maximiza a verosimilhança** $\mathcal{L}(\theta|\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$, face a uma amostra observada $(x_1, ..., x_n)$.

modulol_aula3_4_Estimação.pdf

Função de Log-Verosimilhança

Em muitas situações as funções de verosimilhança satisfazem condições que permitem que o valor para o qual a versomilhança é máxima seja obtido por derivação.

Porém, e como a função logarítimca é monótona, regra geral é mais cómodo trabalhar com a função **log-verosimilhança**,

$$\log \mathcal{L}(\theta|\underline{x})$$

modulol_aula3_4_Estimação.pdf

Método da Máxima Verosimilhança (MMV)

Então, no caso de existirem derivadas (e para um único parâmetro θ), o valor do maximizante é obtido de modo que:

$$\frac{d \log \mathcal{L}}{d\theta} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2 \log \mathcal{L}}{d\theta^2} < 0$$

Note-se que $\displaystyle \frac{d \log \mathcal{L}}{d\theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d \log f(x_i|\theta)}{d\theta}$

A solução, $\hat{\theta}(x_1, ..., x_n)$ é **a estimativa de máxima verosimilhança,** que é uma realização da v.a. $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(X_1, ..., X_n)$.

moduloI_aula3_4_Estimação.pdf

MMV: Exemplo 1

Considere-se X ∩ P(λ) e a amostra (0, 0, 2, 5, 3, 1). Determine uma estimativa de máxima verosimilhança de λ?

MMV: Exemplo 1

Exemplo $X \sim Poi(\lambda)$

$(0, 0, 2, 5, 3, 1)$

emv(λ) [estimativa de máxima verossimilhança de λ com base nesta amostra)

Passo 1 : $\mathcal{L}(\lambda; 0, 0, 2, 5, 3, 1) =$

$$= \prod_{i=1}^{6} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!} = \left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^{0}}{0!}\right]\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^{0}}{0!}\right]\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2}}{2!}\right]$$

$$\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^{5}}{5!}\right]\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^{3}}{3!}\right]\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^{1}}{1!}\right]$$

$$= e^{-6\lambda}\frac{\lambda^{11}}{2!\,5!\,3!\,1!} \equiv g(\lambda)$$

MMV: Exemplo 1

Passo 2 $\quad g'(\lambda) = \dfrac{-6e^{-6\lambda}\lambda^{11} + 11e^{-6\lambda}\lambda^{10}}{2!\,3!\,5!\,1!}$

$= 0 \Leftrightarrow -6\lambda + 11 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{11}{6}$

$g''(\lambda) = 36e^{-6\lambda} \ldots \ldots \Big|_{\lambda=\frac{11}{6}} < 0$

$\text{emv}(\lambda) = \frac{11}{6}$

Passo 2*: Em vez de $\max_{\lambda} g(\lambda)$

vamos $\max_{\lambda} \log g(\lambda)$

$g(\lambda) = \dfrac{e^{-6\lambda}\lambda^{11}}{0!\,2!\,5!\,3!\,1!}$

$\ln g(\lambda) = -6\lambda + 11\log\lambda - \log(\quad)$

$[\ln g(\lambda)]' = -6 + \frac{11}{\lambda}$

$[\ln g(\lambda)]'' = -\frac{11}{\lambda^2} < 0, \forall\lambda$

$\text{emv}: \quad -6 + \frac{11}{\hat{\lambda}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\hat{\lambda} = \frac{11}{6}}$

1. $y = u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1}u'$;
2. $y = c \Rightarrow y' = 0$, onde k é uma constante real;
3. $y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$
4. $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
5. $y = a^u \Rightarrow y' = a^u(\ln a)u', (a > 0, a \neq 1)$
6. $y = e^u \Rightarrow y' = e^u u'$
7. $y = \log_a u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u}\log_a e$
8. $y = \ln u \Rightarrow y' = \dfrac{1}{u}u'$
9. $y = u^v \Rightarrow y' = vu^{v-1}u' + u^v(\ln u)v'$
10. $y = \sin u \Rightarrow y' = u'\cos u$
11. $y = \cos u \Rightarrow y' = -u'\sin u$
12. $y = \tan u \Rightarrow y' = u'\sec^2 u$, desde que $x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$;
13. $y = \cot u \Rightarrow y' = -u'\csc^2 u$, desde que $x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$;

A Mais Completa Tabela de Derivadas e Integrais (matematicasimplificada.com)

MMV: Exemplo 2

Considere-se a v.a. $X \cap \text{Exp}(\mu)$ e a amostra (1.2, 0.5, 3).
Determine uma estimativa de máxima verosimilhança de μ?

MMV: Exemplo 2

Exemplo 2: $X \sim Exp(\mu)$ $\quad f_X(x) = \mu e^{-\mu x}, \; x \geq 0$

amostra: $(1.2;\ 0.5;\ 3)$

$$\text{emv}(\mu) = \hat{\mu} = \frac{3}{1.2+0.5+3}$$

Como X é v.c. contínua:

- $$\mathcal{L}(\mu; x_1, x_2, x_3) = \prod_{i=1}^{3} \mu e^{-\mu x_i} =$$
$$= \mu^3 e^{-\mu \sum x_i} = \mu^3 e^{-\mu(1.2+0.5+3)}$$

- $$\ln \mathcal{L}(\mu) = 3\ln\mu - 4.7\mu$$
$$[\ln \mathcal{L}(\mu)]' = \frac{3}{\mu} - 4.7 = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{4.7}$$
$$[\ln \mathcal{L}(\mu)]'' = -\frac{3}{\mu^2} < 0, \; \forall \mu$$

$$\Rightarrow \text{e.m.v.}(\mu) = \hat{\mu} = \frac{3}{4.7}$$

Slides Professora Claúdia Nunes

Propriedade Fundamental dos EMV: Invariância

Propriedade fundamental dos EMV: Invariância

$$EMV(h(\theta)) = h(EMV(\theta))$$

Exemplo: $EMV(\lambda) = \bar{X}$

$$EMV(\ln \lambda) = \ln(EMV(\lambda)) = \ln \bar{X}$$

Slides Professora Claúdia Nunes

Método da Máxima Verosimilhança: Exercícios

3

Estimadores

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

3. Considere uma população com distribuição de Bernoulli, com parâmetro p, com $0 < p < 1$.
   a) Derive o estimador de máxima verosimilhança para o parâmetro p.
   b) Foi obtida uma amostra de dimensão $n = 3$, cujos valores observados foram (1, 1, 0).
      i. Esboce o gráfico da função de verosimilhança e interprete-o.
      ii. Forneça uma estimativa para p com base no método da máxima verosimilhança.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 2 a): Estimação de Máxima Verosimilhança

a) Função de probabilidade (f. p.):

$$f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x}, \qquad x = 0, 1, \text{com } 0 < p < 1.$$

Função de verosimilhança:

$$\mathcal{L}(p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Logaritmo da função de verosimilhança:

$$\ln(\mathcal{L}(p)) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln(1-p).$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 2 a): Estimação de Máxima Verosimilhança

Condição de 1ª ordem:

$$\frac{\partial \ln(\mathcal{L}(p))}{\partial p} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{1}{p}\right) + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\frac{-1}{1-p}\right) = 0 \Leftrightarrow (1-p)\sum_{i=1}^{n} x_i - p\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - pn = 0 \Leftrightarrow p = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}.$$

Condição de 2ª ordem:

$$\frac{\partial^2 \ln L\,(p\,;x)}{\partial p^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p^2} + \frac{(n - \sum_{i=1}^{n} x_i)(-1)}{(1-p)^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p^2} - \frac{(n - \sum_{i=1}^{n} x_i)}{(1-p)^2} < 0,$$

pois $x_i \geq 0, p^2 > 0, n > 0, (1-p)^2 > 0$ e $n \geq \sum_{i=1}^{n} x_i$ pois $x_i = 0$ ou 1.

Portanto, o estimador de máxima verosimilhança é:

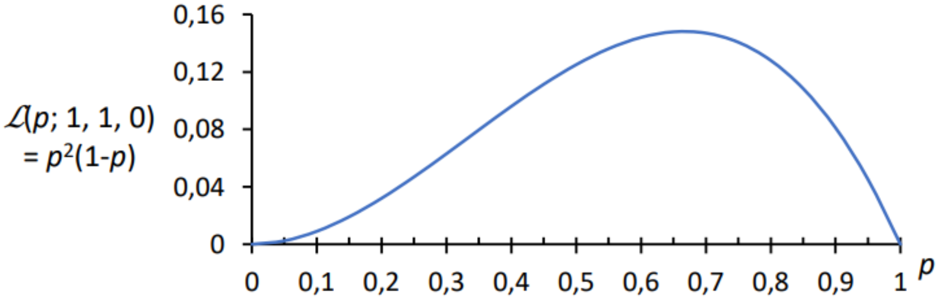
$$\hat{p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 2 b) i e ii: Estimação de Máxima Verosimilhança

b) i) Substituindo em $\mathcal{L}(p)$, (x_1, x_2, x_3) pelos valores observados na amostra, $(1, 1, 0)$, obtemos,

$$\mathcal{L}(p) = p^2(1-p).$$



A função de verosimilhança atinge o seu valor máximo quando o p se situa perto de 0,65, sendo este o valor de p mais provável que deu origem à observação desta amostra.

ii) $\hat{p} = \frac{2}{3} = 0{,}6667$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

2. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a. a. de uma distribuição Normal, $X \sim N(\mu;\ \sigma)$. Estime os parâmetros μ e σ pelo método:

b) Da máxima verosimilhança.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 2: Estimação de Máxima Verosimilhança

b) Função densidade de probabilidade (f. d. p.):

$$f(x;\ \mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \qquad -\infty < \mu < +\infty, \qquad \sigma > 0.$$

Função de verosimilhança:

$$\mathcal{L}(\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i\,;\mu\,,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma^2}\right)^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}.$$

Logaritmo da função de verosimilhança:

$$\ln\left(\mathcal{L}(\mu,\sigma^2)\right) = -\frac{n}{2}\left(\ln(2) + \ln(\pi) + \ln(\sigma^2)\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 2: Estimação de Máxima Verosimilhança

Condições de 1ª ordem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sigma^2}\left(-2\sum_{i=1}^{n} x_i + 2n\mu\right) = 0 \\ -\dfrac{n}{2}\dfrac{1}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \dfrac{2}{4\sigma^4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \\ -n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{n} \\ \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(x_i-\mu)^2}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \overline{x} \\ \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(x_i-\overline{x})}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \overline{x} \\ \sigma^2 = \left(\dfrac{n-1}{n}\right) s^2 \end{cases}$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 2: Estimação de Máxima Verosimilhança

Condições de 2ª ordem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu^2} = -\dfrac{1}{2\sigma^2}2n < 0 \\ \dfrac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma^4} = \dfrac{n}{2}\dfrac{1}{\sigma^4} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^6} < 0 \end{cases},$$

pois $n > 0, \sigma^2 > 0, \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^6} > \frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^4}$.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 2: Estimação de Máxima Verosimilhança

Portanto, os estimadores de máxima verosimilhança obtidos foram:

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \\ \hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n} = \frac{n-1}{n} S^2 \end{cases}.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Murteira et al (2015)
Capítulo 7

1. Seja uma população com função probabilidade

$$f(x\,|\,\theta)=\theta(1-\theta)^x \quad (x=0,1,2,3,\ldots),$$

onde $0<\theta<1$. Sabe-se que $E(X)=(1-\theta)/\theta$. Recolhida uma amostra casual de dimensão 1000 observou-se $\Sigma_{i=1}^{1000} x_i = 980$.

a) Obtenha uma estimativa para θ pelo método dos momentos.

b) Determine o estimador de máxima verosimilhança para θ.

c) Calcule, justificando, a estimativa da máxima verosimilhança para a média da população.

d) Reparametrize a distribuição em função de $\mu=E(X)$, e utilize a nova função probabilidade para estimar a média da população.

e) Mostre que $T=\Sigma_{i=1}^{1000} X_i$ é estatística suficiente para θ.

Exercício 1 b)

b) $\theta = ?$

$$L(\theta) = f(x_1, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i | \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta (1-\theta)^{x_i} =$$

$$= \theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \quad (0<\theta<1)$$

Nota:

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$$

$$\prod_{i=1}^{n} a^{x_i} = a^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\ell(\theta) = \ln \{L(\theta)\} =$$

$$= \ln \{\theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\} =$$

$$= n \ln(\theta) + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(1-\theta) \quad (0<\theta<1)$$

$$\frac{d}{d\theta}\{\ell(\theta)\} = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{\theta} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-\theta} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-\theta} \Leftrightarrow \frac{1-\theta}{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\theta} = \bar{x} + 1 \Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{1+\bar{x}}$$

Exercício 1 b)

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\,\ell(\hat\theta) = \frac{d}{d\theta}\left\{\frac{n}{\theta} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-\theta}\right\}\Bigg|_{\theta=\hat\theta} = -\frac{n}{\theta^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{(1-\theta)^2}\Bigg|_{\theta=\hat\theta} =$$

$$= -\underbrace{\frac{n}{\hat\theta^2}}_{>0} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\underbrace{(1-\hat\theta)^2}_{>0}} < 0 \quad \text{para } \underbrace{(0<\hat\theta<1)}_{\text{Valores admissíveis de } \theta}$$

porque $n = 1000$ e $\sum_{i=1}^{1000} x_i = 980$

__Conclusão__ $\hat\theta = \frac{1}{1+\overline{X}}$ é o estimador da maxima verosimilhança para θ.

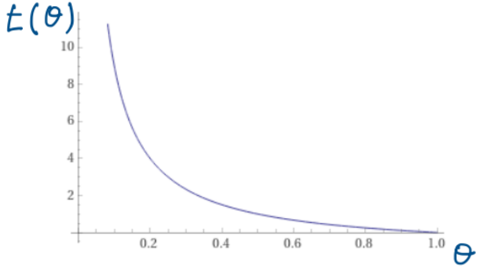
__Nota__: $\hat\theta = \frac{1}{1+\overline{X}}$ é um estimador (variável aleatória)

$\hat\theta = \frac{1}{1+\overline{x}}$ é uma estimativa $(\hat\theta \in \mathbb{R})$

Exercício 1 c)

c) $\mu_X = \dfrac{1-\theta}{\theta} = \dfrac{1}{\theta} - 1 = t(\theta)$ função de θ

Queremos $\hat{\mu}_X = \widehat{t(\theta)}$ e temos $\hat{\theta}$



$t(\theta)$ é monótona decrescente em $0 < \theta < 1$

$\Downarrow$

$t(\theta)$ é função biunívoca de θ em $0 < \theta < 1$

$\Downarrow$

Pode-se usar a propriedade de invariância do EMV

$\hat{\theta} = 0.5051$

$$\hat{\mu}_X = \widehat{t(\theta)} = t(\hat{\theta}) = \frac{1}{\hat{\theta}} - 1 = \frac{1}{0.5051} - 1 = 0.9798$$

Para obter igual às soluções usar $\hat{\theta} = \dfrac{1}{0.98+1}$ sem arredondar

Murteira et al (2015)
Capítulo 7

4. Num saco existem θ bolas, numeradas de 1 a θ. Extraiu-se, ao acaso e com reposição, uma amostra de três bolas, tendo-se observado: 13, 5, 9.
   a) Calcule a estimativa do número de bolas existentes no saco, pelo método dos momentos.
   b) Obtenha a estimativa da máxima verosimilhança para θ.
   c) Com base nas estimativas obtidas nas alíneas anteriores o que pode dizer sobre os estimadores que as originaram.

Exercício 4 b)

b) $L(\theta) = f_X(x_1, x_2, x_3 \mid \theta) = \prod_{i=1}^{3} f(x_i \mid \theta) = \frac{1}{\theta^3} \quad (\theta = x_{(3)}, x_{(3)}+1, x_{(3)}+2, \dots)$

$\Theta = \{ x_{(3)}, x_{(3)}+1, x_{(3)}+2, \dots \} \rightarrow$ espaço-parâmetro discreto

$\rightarrow$ não existe derivada em ordem a θ

Como maximizar L(θ) em ordem a θ ?

$L(\theta) = \frac{1}{\theta^3} \quad (\theta = x_{(3)}, x_{(3)}+1, x_{(3)}+2, \dots)$

- $L(\theta)$ é função decrescente de θ
- Vamos escolher o menor valor $\theta \in \Theta$
- $L(\theta)$ é maximizada em $\theta = x_{(3)}$
- $\hat{\theta} = \underset{\theta}{\arg\max} \{ L(\theta) \} = X_{(3)}$ (Máximo da amostra)

$\rightarrow$ Estimador da M.V.

Exercício 4 b)

Conclusão: A estimativa da máxima verosimilhança para θ é $\hat{\theta} = x_{(3)} = 13$

Comentário: O método da máxima verosimilhança escolhe o maior valor observado como estimativa o numero de bolas no saco. Isto significa que, no contexto desde problema, e independentemente da amostra observada, o método da máxima verosimilhança nunca estima valores não admissíveis para θ. Vimos em a) que tais estimativas absurdas podem acontecer com o método dos momentos.

Murteira et al (2015)
Capítulo 7

7. O tempo que um aluno leva a responder a uma pergunta do exame é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ. Numa amostra casual de 40 observações verificou-se um total de 480 minutos.
   a) Obtenha o estimador da máxima verosimilhança para λ.
   b) Determine a estimativa da máxima verosimilhança para a percentagem de perguntas que são resolvidas em menos de 15 minutos.
   c) Se um exame tiver oito questões, obtenha uma estimativa para a probabilidade de as resolver todas, sabendo que a duração da prova é 2 horas.

Exercício 7 a)

$X \equiv$ Tempo que o aluno demora a responder a uma pergunta do exame (em minutos)

$X \sim ex(\lambda),\ \lambda > 0 \qquad f_X(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x > 0)$

Amostra casual ($n = 40$): $\quad (x_1, \ldots, x_{40})$

$$\sum_{i=1}^{40} x_i = 480 \qquad \bar{x} = \frac{480}{40} = 12$$

a)

$$L(\lambda) = f_X(x_1, \ldots, x_{40} | \lambda) = \prod_{i=1}^{40} f_X(x_i | \lambda) =$$

$$= \prod_{i=1}^{40} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^{40} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{40} x_i}$$

$$\ell(\lambda) = \ln[L(\lambda)] = \ln\left(\lambda^{40} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{40} x_i}\right) =$$

Exercício 7 a)

$$= 40 \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{40} x_i$$

$$\frac{d}{d\lambda} \ell(\lambda) = \frac{40}{\lambda} - \sum_{i=1}^{40} x_i = 0 \iff$$

$$\iff \frac{40}{\lambda} = \sum_{i=1}^{40} x_i \iff \hat{\lambda} = \frac{40}{\sum_{i=1}^{40} x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$$

Condição de 2ª ordem:

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} \ell(\hat{\lambda}) = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{40}{\lambda} - \sum_{i=1}^{40} x_i\right)\Bigg|_{\lambda = \frac{1}{\bar{x}}} = -\frac{40}{\lambda^2}\Bigg|_{\lambda = \frac{1}{\bar{x}}} < 0$$

Conclusão: $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$ é o estimador da máxima verosimilhança para λ.

Exercício 7 b)

b) Percentagem = Probabilidade × 100

$$P(X<15) = \int_0^{15} f_X(x|\lambda)\,dx = \int_0^{15} \lambda e^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{15} = -e^{15\lambda} - (-e^{-0}) = 1 - e^{-15\lambda} =$$

$= t(\lambda) \rightarrow$ função estritamente crescente de λ

$t(\lambda)$ é função biunívoca de λ, logo podemos usar a propriedade de invariância do EMV:

$$\widehat{t(\lambda)} = t(\hat{\lambda}) = 1 - e^{-15\hat{\lambda}} = 1 - e^{-\frac{15}{12}} = 0.7135$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{\bar{x}}} = \frac{1}{12} \qquad \text{exame} = 2\,h = 120 \text{ min}$$

Exercício 7 c)

c) $X \equiv$ Tempo 1 pergunta (min.) $\sim ex(\lambda)$

$S = \sum_{i=1}^{8} X_i \equiv$ Tempo 8 perguntas (min) $\sim G(8, \lambda)$

$X \sim G(n;\lambda) \Leftrightarrow 2\lambda X \sim \chi^2(2n)$ $\qquad Q = 2\lambda S \sim \chi^2(16)$

$P(S \leqslant 120) = P(2\lambda S \leqslant 2 \times \lambda \times 120) =$

$= P(Q \leqslant 240\lambda)$

$= t(\lambda) \rightarrow$ função estritamente crescente de λ em $\lambda > 0$

Assim sendo podemos usar a propriedade de invariância do EMV:

$\widehat{P(S \leqslant 120)} = \widehat{P(Q \leqslant 240\lambda)} = P(Q \leqslant 240\hat{\lambda}) =$

$= P\left(Q \leqslant \frac{240}{12}\right) = P(Q \leqslant 20) \rightarrow$ não está na tabela

$= 0.78 \longleftarrow$

```
> pchisq(20 , 16) |> round(2)
[1] 0.78
```

A1 $\quad fx\quad$ =ARRED(DIST.CHIQ(20;16;VERDADEIRO); 2)

	A	B	C	D	E	F	G
1	0,78						
2							

Usando só as tabelas, o melhor que se podia fazer era usar o valor mais próximo de 20 na tabela da $\chi^2(16)$:

$P(Q \leqslant 20) = 1 - P(Q > 20) \approx 1 - P(Q > 19.369) = 1 - 0.25 =$
$= 0.75$

Murteira et al (2015)
Capítulo 7

8. Admite-se que o tempo de reparação de certo tipo de máquinas, X, segue uma distribuição normal de parâmetros desconhecidos. A fim de estimar esses parâmetros recolheu-se uma amostra aleatória de tempos de reparação (em minutos). Os dados são os seguintes:

$$n = 10,\ \sum_{i=1}^{10} x_i = 846 \text{ e } \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 71607.$$

Estime a probabilidade do tempo de reparação de uma máquina ser inferior a 83 minutos.

Exercício 8

$X \equiv$ Tempo de reparação (em minutos) $\sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Amostra casual: $(x_1, \cdots, x_{10})$ $\quad n = 10$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 846$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 71607$$

$$f_X(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}$$

$$L(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$$

Nota: Já determinados os EMV no exemplo anterior, denotado por exercício 2.

Exercício 8

$$\ell(\mu,\sigma) = \ln L(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln\ 2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 =$$

$$= -\frac{n}{2}\left[\ln(2\pi) + \ln(\sigma^2)\right] - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 =$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2, \quad (\mu,\sigma^2)\in\Theta,$$

$$\Theta = \{(\mu,\sigma^2): \mu\in\mathbb{R} \wedge \sigma^2\in\mathbb{R}^+\}.$$

Exercício 8

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \mu} \ell(\mu, \sigma^2) = -\dfrac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} 2(x_i - \mu)(-1) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)}{\sigma^2} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \sigma^2} \ell(\mu, \sigma^2) = -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{2\sigma^4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0 \\ \dfrac{n}{2\sigma^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{2\sigma^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = n\mu \\ \sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{n} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x} \\ \sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} = s^2 \end{cases}$$

Exercício 8

$$P(X < 83) = \Phi\left(\frac{83-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{83-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) = t(\mu, \sigma^2)$$

A função $t(\mu, \sigma^2)$ é biunívoca (separadamente) em relação a μ e a σ^2. Assim sendo, podemos usar a propriedade de invariância do EMV:

$$\widehat{t(\mu, \sigma^2)} = t(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{846}{10} = 84.6$$

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{71607}{10} - 84.6^2 = 3.54$$

Exercício 8

Então: $\widehat{P(X<83)} = \Phi\left(\frac{83-\hat{\mu}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}}\right) = \Phi\left(\frac{83-\bar{x}}{\sqrt{s^2}}\right) =$

$$= \Phi\left(\frac{83-84.6}{\sqrt{3.54}}\right) \simeq \Phi(-0.85)$$

$$= 1 - \Phi(0.85) = 1 - 0.8023$$

Tabela 4

$$= 0.1977$$

Obrigada!

Questões?